1770

Considerationes de traiectoriis orthogonalibus

Leonhard Euler

CONSIDERATIONES DE TRAIECTORIIS ORTHOGONALIBVS.

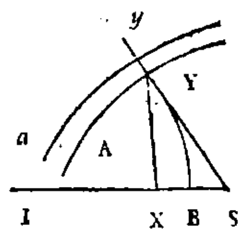
Auctore

L. EVLERO.

I.

Problema traiectoriarum orthogonalium, quod olim Geometrarum sagacitatem diu multumque exercuit, ita se habebat

vt propositis infinitis lineis AY, aY *communi quadam lege contentis, quaerantur aliae lineae* BY y *illas normaliter traiicientes*



ad quod soluendum sequentia momenta perpendi oportet.

1°. Cum lineae secandae communi quadam aequatione contineantur, haec aequatio praeter binas coordinatas $IX = x$ et $XY = y$, parametrum inuoluet p, quae pro eadem curua AY eundem valorem retineat, valore autem mutato reliquas curuas exhibeat.

2°. Hinc ista aequatio differentiata parametrum p quoque variabilem sumendo huiusmodi formam induet $L\,dy = M\,dx + N\,dp$; vnde pro eadem curua AY, ob $dp = 0$, erit $\frac{dy}{dx} = \frac{M}{L}$; ideoque ducta ad eam recta normali YS fiet subnormalis $XS = \frac{My}{L}$.

3°. Verum haec eadem subnormalis XS pro curua secante BY debet esse subtangens, vnde retentis pro hac curua iisdem coordinatis $IX = x$, et $XY = y$, necesse est sit eius subtangens $\frac{y\,dx}{dy} = \frac{-My}{L}$ ideoque $L\,dx + M\,dy = 0$.

4°. Pro lineis ergo secandis proposita aequatione inter coordinatas x, y et parametrum variabilem p, quae differentiata praebeat $L\,dy = M\,dx + N\,dp$, pro curuis secantibus haec habebitur aequatio differentialis $L\,dx + M\,dy = 0$.

II.

Totum ergo negotium huc est reductum, vt data huiusmodi aequatione differentiali $L\,dy = M\,dx + N\,dp$, methodus inueniatur hanc aequationem $L\,dx + M\,dy = 0$ integrandi, in quo quidem nulla foret difficultas si quantitates L et M solas binas coordinatas x et y implicarent exclusa parametro p, quia tum in ea duae tantum occurrent variabiles x et y, et huiusmodi aequationum integratio merito hic tanquam concessa spectatur. Verum si quantitates L et M insuper parametrum p inuoluant, ita vt aequatio $L\,dx + M\,dy = 0$ tres contineat quantitates variabiles x, y et p, eius integrationem ne suscipere quidem licet, nisi simul cum altera aequatione data $L\,dy = M\,dx + N\,dp$ coniugatur, indeque

deque vna trium variabilium penitus extrudatur, vt aequatio differentialis inter duas tantum variabiles obtineatur. Quod nisi efficere licuerit, vix quicquam circa naturam traiectoriarum orthogonalium definiri poterit, quare quoties haec difficultas occurrit, problema hoc merito inter difficillima refertur; tantumque abest vt hoc problema etiamsi olim summo studio sit tractatum, pro confecto sit habendum, vt potius etiamnunc maxima attentione dignum sit iudicandum.

III.

Cum igitur totum negotium eo redeat, vt pro traiectoriis eiusmodi aequatio differentialis eliciatur, quae duas tantum quantitates variabiles contineat, praecipuos percurramus casus, quibus hunc scopum assequi licet.

1°. Ac primo quidem si aequatio pro curuis secandis ita exhiberi queat, vt parameter p per coordinatas x et y absolute definiatur, seu functioni cuipiam ipsarum x et y aequetur, haec aequatio differentiata huiusmodi dabit formam $dp = P\,dx + Q\,dy$, in qua P et Q sunt functiones ipsarum x et y tantum quae cum forma $L\,dy = M\,dx + N\,dp$ comparata praebet $L = Q$, $M = -P$ et $N = 1$. Quare pro traiectoriis haec habebitur aequatio: $Q\,dx - P\,dy = 0$ duas tantum variabiles x et y inuoluens, cuius adeo integratio pro concessa haberi potest.

2°.

2°. Si aequatio pro curuis secandis ita exhiberi queat, vt applicata y aequetur functioni cuipiam ipsarum x et p, ex eiusque differentiatione prodeat $dy = P\,dx + R\,dp$, ita vt P et R sint functiones ipsarum x et p tantum, tum ob $L = 1$, $M = P$ et $N = R$, pro traiectoriis habebitur aequatio $dx + P\,dy = 0$, quae ob $dy = P\,dx + R\,dp$ abit in hanc formam: $(1 + PP)\,dx + PR\,dp = 0$, duas tantum variabiles p et x implicantem.

3°. Si aequatio pro curuis secandis ita exhibeatur, vt abscissa x aequetur functioni cuipiam ipsarum y et p ex cuius differentiatione prodeat $dx = Q\,dy + R\,dp$, vbi Q et R sint functiones ipsarum y et p tantum tum ob $L = Q$, $M = 1$ et $N = -R$, natura traiectoriarum exprimetur hac aequatione $Q\,dx + dy = 0$, quae ob $dx = Q\,dy + R\,dp$ transformatur in hanc $(1 + QQ)\,dy + QR\,dp = 0$ inter y et p tantum.

IV.

Quoties ergo vel parameter p per ambas coordinatas x et y vel altera coordinatarum per alteram et parametrum definitur, inuentio traiectoriarum ad aequationem eiusmodi differentialem reducitur in qua duae tantum insunt quantitates variabiles, cuius propterea resolutio tanquam concessa potest spectari, etiamsi forte nulla etiamnum pateat via negotium expediendi. Hoc autem intelligendum est

si

ſi illae expreſſiones fuerint explicitae, ſiue ſint algebraicae ſiue tranſcendentes, ſin autem tantum per formulas integrales dentur, in quibus altera variabilium pro conſtante habeatur, tum aequationes inventae nullum praeſtant vſum, niſi forte peculiari artificio a formula integrali liberari queant. Veluti ſi pro curuis ſecandis huiusmodi habeatur aequatio $y = \int V\,dx$, vbi V ſit functio ipſarum x et p, in hac autem integratione parameter p vt conſtans ſpectetur: tum enim pro valore ipſius $dy = P\,dx + R\,dp$, habetur quidem $P = V$, ſed quantitas R noua forma integrali implicatur dum fit $R = \int dx \left(\frac{dV}{dp}\right)$, in qua integratione iterum ſola x variabilis aſſumitur. Quare cum aequatio pro traiectoriis futura ſit $(1 + VV)\,dx + V\,dp \int dx \left(\frac{dV}{dp}\right) = 0$, ob hanc formulam integralem minime patet, quomodo eius reſolutionem inſtitui conueniat.

V.

Quo haec difficultas clarius appareat caſum ſingularem euoluam, quo aequationem pro traiectoriis exhibere licet et qui iam olim methodo perquam ingenioſa fuit erutus. Quaeritur ſcilicet, cuiusmodi functio ipſarum x et p debeat eſſe quantitas V, vt cum pro curuis ſecandis ſit $y = \int V\,dx$, aequatio pro traiectoriis $(1 + VV)\,dx + V\,dp \int dx \left(\frac{dV}{dp}\right) = 0$, per certam quantitatem multiplicata integrabilis euadat.

dat. Sit iſte multiplicator $\frac{\Pi}{V}$, exiſtente Π functione ipſius p tantum, vt habeatur.

$$\frac{\Pi\,dx(1+VV)}{V} + dp \int \Pi\,dx \left(\frac{dV}{dp}\right) = 0$$

quoniam enim Π quantitatem x non inuoluit, erit vtique

$$\Pi\,dp \int dx \left(\frac{dV}{dp}\right) = dp \int \Pi\,dx \left(\frac{dV}{dp}\right).$$

Iam ſtatuatur huius formae integrale $= \int \frac{\Pi\,dx(1+VV)}{V}$ vt pro traiectoriis habeatur haec aequatio.

$$\int \frac{\Pi\,dx(1+VV)}{V} = C$$

et cum eius differentiale ex variabilitate vtriusque x et p natum fiat:

$$\frac{\Pi\,dx(1+VV)}{V} + dp \int dx \left(\frac{1}{dp}\,d\,\frac{\Pi(1+VV)}{V}\right) = 0$$

Quare ſtatui oportet:

$$\int \Pi\,dx \left(\frac{dV}{dp}\right) = \int dx \left(\frac{1}{dp}\,d.\,\frac{\Pi(1+VV)}{V}\right)$$

ſeu $\Pi\left(\frac{dV}{dp}\right) = \left(\frac{1}{dp}\,d.\,\frac{\Pi(1+VV)}{V}\right)$. Cum nunc in his differentialibus ſola p vt variabilis, x vero vt conſtans ſpectetur facta euolutione prodit:

$$\Pi\,dV = \frac{\Pi\,dV(VV-1)}{VV} + \frac{d\Pi(1+VV)}{V} \text{ ſeu}$$

$$\frac{\Pi\,dV}{VV} = \frac{d\Pi(1+VV)}{V}, \text{ ideoque } \frac{d\Pi}{\Pi} = \frac{dV}{V(1+VV)} = \frac{dV}{V} - \frac{V\,dV}{1+VV}$$

vnde integrando elicitur $\Pi = \frac{VX}{\sqrt{(1+VV)}}$, loco conſtantis indroducta X functione ipſius x tantum. Hinc ergo fit $V = \frac{\Pi}{\sqrt{(XX - \Pi\Pi)}}$

 VI.

VI.

En ergo casum satis elegantem simulque non parum late patentem, quo traiectorias orthogonales exhibere licet etiamsi aequatio pro curuis secandis sit $y = \int \frac{\Pi\, dx}{\sqrt{(XX - \Pi\Pi)}}$ vbi X denotat functionem quamcunque abscissae x, atque Π functionem parametri p quamcunque, ita vt forte haec formula integralis nullo modo euolutionem admittat. Pro traiectoriis enim, ob $1 + VV = \frac{XX}{XX - \Pi\Pi}$, habebitur ista aequatio $\int \frac{X\, dx}{\sqrt{(XX - \Pi\Pi)}} = C$. quae pro diuersis valoribus constantis C infinitas praebet curuas, quae omnes normaliter curuas datas traiicient. Pro iis quidem aequatio inter coordinatas x et y eliceretur, si ope aequationis $y = \int \frac{\Pi\, dx}{\sqrt{(XX - \Pi\Pi)}}$, parameter p eiusue functio Π eliminari posset verum ad constructionem aequatio inuenta iam maxime est accommodata. Pro quauis enim parametro, seu quouis valore litterae Π super axe describatur curua, cuius applicata $= \frac{XX}{\sqrt{(XX - \Pi\Pi)}}$, in eaque abscindatur area datae areae aequalis, cuius abcissa si sit $= x$, applicata traiectoriae erit $y = \int \frac{\Pi\, dx}{\sqrt{(XX - \Pi\Pi)}}$: vel sufficit notasse has duas aequationes:

$$y = \int \frac{\Pi\, dx}{\sqrt{(XX - \Pi\Pi)}} \text{ et } C = \int \frac{XX\, dx}{\sqrt{(XX - \Pi\Pi)}}$$

vbi notetur C designare parametrum traiectoriarum.

VII.

VII.

Verum his quae iam olim copiosissime sunt pertractata, diutius hic immorandum non censeo; sed potius alias considerationes, ad quas me haec quaestio perduxit, in medium afferam. Ac primo quidem, quod per se est perspicuum obseruo lineas secandas et traiectorias inter se reciprocari; atque quaestionem circa duo eiusmodi systemata linearum versari quae ad eundem axem descripta, se mutuo vbique ad angulos rectos intersecent. Vtriusque autem systematis natura exprimitur aequatione inter binas coordinatas x et y et parametrum, cuius variabilitas infinitas lineas suppeditat. Pro altero ergo systemate sit parameter $= p$, pro altero vero $= q$; vnde duas concipi oportet aequationes, alteram inter x, y et p, alteram vero inter x, y et q; inter quas quaenam intercedere debeat relatio, vt propositae conditioni satisfiat, hic accuratius sum inuestigaturus. Supra autem vidimus, si pro altero systemate habeatur huiusmodi aequatio differentialis $L\,dp + M\,dx + N\,dy = 0$, tum naturam alterius hac aequatione $N\,dx - M\,dy = 0$ expressum iri hicque eius parametrum q vt constantem spectari.

VIII.

Quia nunc aequatio $N\,dx - M\,dy = 0$ duas tantum quantitates variabiles x et y continere intelligitur, et huius systematis parameter q in constante per integrationem accedente demum inuolui-

tur,

tur, aequatio differentialis pro altero ſyſtemate, etiam parametrum q pro variabili habendo, ita erit comparata: $K\,dq + N\,dx - M\,dy = 0$. Hincque nouimus aequationes differentiales pro vtroque linearum ſyſtemate ita inter ſe eſſe connexas, vt ſint:

$$L\,dp + M\,dx + N\,dy = 0 \quad \text{et} \quad K\,dq + N\,dx - M\,dy = 0.$$

Si in illa p in hac vero q per x et y detur, et vtraque aequatio ad integrabilitatem perducatur, formae prodibunt huiusmodi:

$$dp = M(P\,dx + Q\,dy) \quad \text{et} \quad dq = N(Q\,dx - P\,dy)$$

vbi P et Q denotant functiones ipſarum x et y quaſcunque, M vero et N eiusmodi multiplicatores, qui illas formulas differentiales $P\,dx + Q\,dy$ et $Q\,dx - P\,dy$ integrabiles reddant. Quod cum ſemper fieri poſſit, hinc facile infinita huiusmodi ſyſtematum paria exhiberi poſſunt: veluti ſi ſit $P = X$ functioni ipſius x et $Q = Y$ functioni ipſius y noſtrae aequationes integratae ita ſe habebunt:

$$p = \int X\,dx + \int Y\,dy \quad \text{et} \quad q = \int \frac{dx}{X} - \int \frac{dy}{Y}.$$

IX.

Definiamus quoque ambas coordinatas per parametros p et q, et aequationes noſtrae ita fient comparatae

$$dx + \frac{LM\,dp + KN\,dq}{MM + NN} = 0 \quad \text{et}$$

$$dy + \frac{LN\,dp - KM\,dq}{MM + NN} = 0$$

quae

quae ad has formas concinniores reuocantur:

$$dx = PR\,dp + QS\,dq \quad \text{et} \quad dy = PS\,dp - QR\,dq$$

atque hic iam P, Q, R et S denotant functiones ipſarum p et q eiusmodi, vt ambae formulae integrabiles euadant. Cum igitur x et y ſint functiones ipſarum p et q erit

$$PR = \left(\frac{dx}{dp}\right);\ QS = \left(\frac{dx}{dq}\right);\ PS = \left(\frac{dy}{dp}\right);\ QR = -\left(\frac{dy}{dq}\right)$$

hinc colligitur iſta inſignis proprietas vt ſit

$$\left(\frac{dx}{dp}\right)\left(\frac{dx}{dq}\right) + \left(\frac{dy}{dp}\right)\left(\frac{dy}{dq}\right) = 0$$

indeque porro haec quaeſtio maximi momenti, quomodo ſi pro altera coordinatarum x et y detur functio ipſarum p et q ipſi aequalis, inde functio ipſarum p et q alteri aequalis erui debeat: quae quaeſtio ad eam calculi integralis partem eſt referenda, quam demum excoli conuenit.

X.

Cum ſolutio huius aequationis admodum ardua videatur, operae erit pretium binas aequationes modo inuentas.

$$dx = PR\,dp + QS\,dq \quad \text{et} \quad dy = PS\,dp - QR\,dq$$

alia methodo reſoluere. Imaginaria ſcilicet haud reformidantes inde colligimus:

$$dx + dy\sqrt{-1} = (R + S\sqrt{-1})(P\,dp - Q\,dq\sqrt{-1})$$

ſimili autem modo ſit neceſſe eſt:

$$dx - dy\sqrt{-1} = (R - S\sqrt{-1})(P\,dp + Q\,dq\sqrt{-1}).$$

Iam

Iam quaecunque fuerint P et Q functiones ipsarum p et q multiplicator semper inueniri poterit hanc formulam ambiguam $Pdp \mp Qdq\sqrt{-1}$ integrabilem reddens: sit ergo M iste multiplicator et ponatur $\int M(Pdp \mp Qdq\sqrt{-1}) = T \pm V\sqrt{-1}$; atque pro $R \pm S\sqrt{-1}$ assumi oportet functionem quamcunque ipsius $T \pm V\sqrt{-1}$ in M ductam, vnde facta integratione prodibit

$$x+y\sqrt{-1} = \text{funct.}(T+V\sqrt{-1}) \text{ et } x-y\sqrt{-1} = \text{funct.}(T-V\sqrt{-1})$$

hincque colligimus has formas integrales:

$$x = \tfrac{1}{2}\Gamma:(T+V\sqrt{-1}) + \tfrac{1}{2}\Gamma:(T-V\sqrt{-1}) + \tfrac{1}{2\sqrt{-1}}\Delta:(T+V\sqrt{-1}) - \tfrac{1}{2\sqrt{-1}}\Delta:(T-V\sqrt{-1})$$

$$y = \tfrac{1}{2\sqrt{-1}}\Gamma:(T+V\sqrt{-1}) - \tfrac{1}{2\sqrt{-1}}\Gamma:(T-V\sqrt{-1}) - \tfrac{1}{2}\Delta:(T+V\sqrt{-1}) - \tfrac{1}{2}\Delta:(T-V\sqrt{-1})$$

quae semper ad realitatem reuocantur, quaecunque functiones his signis Γ et Δ denotentur.

XI.

Hic quidem litterae T et V denotant functiones binarum parametrorum p et q sed minime arbitrarias, definiuntur enim ex formula differentiali $Pdp \mp Qdq\sqrt{-1}$, vbi P et Q necessario sunt quantitates reales. Verumtamen sine hac conditione indoles illarum quantitatum T et V erui potest, considerando quod esse debeat $(\frac{dx}{dp})(\frac{dx}{dq}) + (\frac{dy}{dp})(\frac{dy}{dq}) = 0$.

Cum

Cum enim inuenerimus:

$$x+y\sqrt{-1} = \Sigma:(T+V\sqrt{-1}), \text{ et } x-y\sqrt{-1} = \Theta:(T-V\sqrt{-1})$$

erit differentiando:

I. $(\frac{dx}{dp}) + (\frac{dy}{dp})\sqrt{-1} = ((\frac{dT}{dp}) + (\frac{dV}{dp})\sqrt{-1})\Sigma':(T+V\sqrt{-1})$

II. $(\frac{dx}{dq}) + (\frac{dy}{dq})\sqrt{-1} = ((\frac{dT}{dq}) + (\frac{dV}{dq})\sqrt{-1})\Sigma':(T+V\sqrt{-1})$

III. $(\frac{dx}{dp}) - (\frac{dy}{dp})\sqrt{-1} = ((\frac{dT}{dp}) - (\frac{dV}{dp})\sqrt{-1})\Theta':(T-V\sqrt{-1})$

IV. $(\frac{dx}{dq}) - (\frac{dy}{dq})\sqrt{-1} = ((\frac{dT}{dq}) - (\frac{dV}{dq})\sqrt{-1})\Theta':(T-V\sqrt{-1})$

colligantur hinc producta I x IV et III x II in vnam summam ac reperietur:

$$2(\tfrac{dx}{dp})(\tfrac{dx}{dq}) + 2(\tfrac{dy}{dp})(\tfrac{dy}{dq}) = 2((\tfrac{dT}{dp})(\tfrac{dT}{dq}) + (\tfrac{dV}{dp})(\tfrac{dV}{dq}))\,\Sigma':(T+V\sqrt{-1}).\,\Theta':(T-V\sqrt{-1})$$

ideoque functiones T et V ita sunt comparatae; vt sit

$$(\tfrac{dT}{dp})(\tfrac{dT}{dq}) + (\tfrac{dV}{dp})(\tfrac{dV}{dq}) = 0.$$

XII.

Hinc ergo intelligimus pro T et V eiusmodi functiones ipsarum p et q sumi debere, quae iam ipsae idoneos valores pro coordinatis x et y praebeant. Quare inuentis iam duobus valoribus bina linearum se mutuo orthogonaliter secantium systemata exhibentibus, $x = t$ et $y = u$ existentibus t et u eiusmodi functionibus binarum parametrorum p et q vt sit $(\frac{dt}{dp})(\frac{dt}{dq}) + (\frac{du}{dp})(\frac{du}{dq}) = 0$ hinc facilime infinita alia talium systematum paria

deriuan-

deriuantur, quae binis ſequentibus aequationibus continentur

$$x = \tfrac{1}{2}\Gamma:(t+u\sqrt{-1}) + \tfrac{1}{2}\Gamma:(t-u\sqrt{-1}) - \tfrac{1}{2\sqrt{-1}}\Delta:(t+u\sqrt{-1}) + \tfrac{1}{2\sqrt{-1}}\Delta:(t-u\sqrt{-1})$$

$$y = \tfrac{1}{2\sqrt{-1}}\Gamma:(t+u\sqrt{-1}) - \tfrac{1}{2\sqrt{-1}}\Gamma:(t-u\sqrt{-1}) + \tfrac{1}{2}\Delta:(t+u\sqrt{-1}) + \tfrac{1}{2}\Delta:(t-u\sqrt{-1})$$

quam formam magis complicatam ideo elegi, vt imaginaria ſingulis functionibus euoluendis ſponte ſe deſtruant.

XIII.

Hae formulae eo magis ad praxin ſunt accommodatae, quod eadem operatione infinitae ſolutiones obtineri queant. Prodeant enim pro Γ variis functionibus determinatis ſumendis ex forma $\tfrac{1}{2}\Gamma:(t+u\sqrt{-1}) + \tfrac{1}{2}\Gamma:(t-u\sqrt{-1})$ hi valores $T; T'; T''; T'''$ etc. ex hac vero $\tfrac{1}{2\sqrt{-1}}\Gamma:(t+u\sqrt{-1}) - \tfrac{1}{2\sqrt{-1}}\Gamma:(t-u\sqrt{-1})$ hi V, V', V'', V''' etc. atque valores quaeſtioni ſatisfacientes erunt ſequentes

$$x = \alpha T + \beta T' + \gamma T'' + \delta T''' - \varepsilon V - \zeta V' - \eta V'' - \theta V'''$$

$$y = \alpha V + \beta V' + \gamma V'' + \delta V''' + \varepsilon T + \zeta T' + \eta T'' + \theta T'''$$

vbi litterae $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta$ denotant coefficientes quoscunque. Probe autem notandum eſt valores homologos V, V, item T', V' etc. ex iisdem functionibus Γ: ſimulque omnes ex iisdem litteris t et u eſſe formandas. Neque enim hinc in genere concludere

dere licet ſi ſatisfaciant valores $x = T$, $y = V$, tum vero etiam alii quicunque $x = R$, $y = S$ inde quoque hos $x = \alpha T + \beta R$ et $y = \alpha V + \beta S$ eſſe ſatisfacturos; hoc enim non valet niſi functiones R et S ex iisdem litteris t et u ſint natae atque functiones T et V. Hinc probe cauendum eſt, ne ſuperioribus formis generalibus plus tribuatur, quam fas eſt.

XIV.

Valores ſimpliciores litterarum T et V ex iam inuentis quantitatibus idoneis t et u formandi, ex poteſtatibus loco functionis Γ ſubſtitutis naſcuntur atque ita ſe habebunt:

$$\left.\begin{matrix} T = t \\ V = u \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} T = tt - uu \\ V = 2tu \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} T = t^3 - 3tuu \\ V = 3ttu - u^3 \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} T = t^4 - 6ttuu + u^4 \\ V = 4t^3u - 4tu^3 \end{matrix}\right| \text{etc.}$$

ex poteſtatibus vero negatiuis oriuntur:

$$\left.\begin{matrix} T = \frac{t}{tt+uu} \\ V = \frac{u}{tt+uu} \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} T = \frac{tt-uu}{(tt+uu)^2} \\ V = \frac{2tu}{(tt+uu)^2} \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} T = \frac{t^3-3tuu}{(tt+uu)^3} \\ V = \frac{3ttu-u^3}{(tt+uu)^3} \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} T = \frac{t^4-6ttuu+u^4}{(tt+uu)^4} \\ V = \frac{4t^3u-4tu^3}{(tt+uu)^4} \end{matrix}\right.$$

vbi obſeruare licet ſi ponatur $t = v\,\text{cof.}\,\Phi$ et $u = v\,\text{fin.}\,\Phi$ tum omnes hos valores in iſtis formulis ſimplicibus contineri

$$T = v^n\,\text{cof.}\,n\Phi \quad \text{et} \quad V = v^n\,\text{fin}\,\Phi$$

Totum ergo negotium huc redit vt pro t et u eiusmodi idoneae functiones ipſarum p et q obtineantur, vt fiat

$$\left(\frac{dt}{dp}\right)\left(\frac{dt}{dq}\right) + \left(\frac{du}{dp}\right)\left(\frac{du}{dq}\right) = 0.$$

XV.

XV.

Seu quod eodem redit sumtis pro P et Q functionibus quibuscunque ipsarum p et q, consideretur formula differentialis $P\,dp + Q\,dq\sqrt{-1}$, et quaeratur multiplicator eam reddens integrabilem tum integrale ex parte reali et imaginaria constans comparetur cum formula $t + u\sqrt{-1}$, indeque vtriusque litterae t et u valor idoneus elicietur Vnde primum obseruo si P sit functio solius p et Q solius q, prodire $t = \int P\,dp$ et $u = \int Q\,dq$. Qoniam autem hae formae $\int P\,dp$ et $\int Q\,dq$ aeque pro parametris amborum systematum linearum haberi possunt atque ipsae quantitates p et q, idem est ac si hinc statuamus $t = p$ et $u = q$, neque etiam latius patere, censendi est haec positio $t = \alpha p + \beta$ et $u = \gamma q + \delta$. Interim tamen si sumamus $P = 1$ et $Q = 1$ formula $dp + dq\sqrt{-1}$ non solum dat $t = p$ et $u = q$, sed quia illa formula per $m + n\sqrt{-1}$ multiplicata manet integrabilis, et integrale est $mp - nq + np\sqrt{-1} + mq\sqrt{-1}$, unde etiam hi obtinentur valores:

$$t = mp - nq \text{ et } u = np + mq.$$

qui vtique latius patere videntur, verumtamen, quia valores inde natos T, T′, T″ et V, V′, V″ etc. combinare licet, non aliae lineae inde nascuntur, atque ex simplicibus valoribus $t = p$ et $u = q$.

XVI.

XVI.

Statuamus ergo $t = p$ et $u = q$, et percurramus simpliciora linearum systemata se mutuo ad angulos rectos secantium: ac primo quidem occurrunt hae formae:

$$x = \alpha p - \varepsilon q \text{ et } y = \alpha q + \varepsilon p$$

vnde eliminando primo q tum vero p ambo linearum systemata his aequationibus continebuntur:

$$\alpha x + \varepsilon y = (\alpha\alpha + \varepsilon\varepsilon)p \text{ et } \alpha y - \varepsilon x = (\alpha\alpha + \varepsilon\varepsilon)q$$

vtrumque continens infinitas lineas rectas inter se parallelas quarum quaelibet rectas alterius systematis normaliter secat qui sine dubio casus est simplicissimus.

XVII.

Sumatur secundo $T = tt - uu$ et $V = 2tu$, et quia binis terminis iungendis lineae tantum ad alium axem transferuntur statuamus simpliciter $x = pp - qq$ et $y = 2pq$; vnde cum sit $\sqrt{(xx+yy)} = pp + qq$, elidendo alternatim q et p, pro binis linearum systematibus adipiscimur has aequationes

$$\sqrt{(xx+yy)} + x = 2pp \text{ et } \sqrt{(xx+yy)} - x = 2qq.$$

Quare si loco $2pp$ et $2qq$ simpliciter scribamus p et q hae aequationes ita se habebunt:

$$yy = pp - 2px \text{ et } yy = qq + 2qx.$$

 Vtra-

Vtraque aequatio infinitas continet parabolas ſuper communi axe ex eodem foco deſcriptas, dum alterius ſyſtematis parabolae dextrorſum, alterius vero ſiniſtrorſum excurrunt; quae eſt pulcerrima parabolarum proprietas, ſine dubio iam olim obſeruata. Praeterea obſeruo etiamſi praecedentes valores $T=p$ et $V=q$ cum his combinentur, tamen easdem parabolas eſſe prodituras.

XVIII.

Statuamus nunc $T=t^3-3tuu$ et $V=3ttu-u^3$, formemusque has aequationes:

$$x=p^3-3pqq \quad \text{et} \quad y=3ppq-q^3$$

quarum haec dat $p=\sqrt{\frac{y+q^3}{3q}}$, qui valor in prima ſubſtitutus praebet: $x=\frac{y-8q^3}{3q}\sqrt{\frac{y+q^3}{3q}}$, et ſumtis quadratis:

$$27q^3xx=y^3-15qyy+48q^6y+64q^9$$

ſcribamus q et p loco q^3 et p^3, et aequationes pro ambobus linearum ſyſtematibus erunt:

$$27qxx=y^3-15qyy+48qqy-64q^3$$

$$27pyy=-x^3+15pxx-48ppx+64p^3$$

quae autem ad proprietates agnoſcendas commodius ita repraeſentantur:

$$x=\frac{y-8q}{3}\sqrt{\frac{y+q}{3q}} \quad \text{et} \quad y=\frac{x+8p}{3}\sqrt{\frac{p-x}{3p}}.$$

quae

quae aequationes dant lineas tertii ordinis, quae pro vtroque ſyſtemate ſunt eiusdem naturae, dum coordinatae tantum permutantur.

XIX.

Conſideremus etiam functiones ex poteſtatibus negatiuis natas ſitque $T=\frac{t}{tt+uu}$ et $V=\frac{u}{tt+uu}$ atque ob $t=p$ et $u=q$, habebimus:

$$x=\frac{p}{pp+qq} \quad \text{et} \quad y=\frac{q}{pp+qq}.$$

Hinc fit $xx+yy=\frac{1}{pp+qq}$, ideoque pro ambobus linearum ſyſtematibus habebimus has aequationes:

$$x=p(xx+yy) \quad \text{et} \quad y=q(xx+yy).$$

Formam vtriusque parametri ita immutemus vt ſtatuamus $p=\frac{1}{2p}$ et $q=\frac{1}{2q}$, et bina linearum ſyſtemata his aequationibus exprimentur:

$$xx+yy=2px \quad \text{et} \quad xx+yy=2qy$$

quae praebent circulorum bina ſyſtemata.

XX.

Euoluamus etiam ex eodem genere ſequentes formulas, ſitque

$$x=\frac{pp-qq}{(pp+qq)^2} \quad \text{et} \quad y=\frac{2pq}{(pp+qq)^2}.$$

Hinc primo elicimus:

$$xx+yy=\frac{1}{(pp+qq)^2} \text{ ita vt ſit}$$

$$\frac{x}{xx+yy}=pp-qq \quad \text{et} \quad \frac{y}{xx+yy}=2pq.$$

Dein-

Deinde cum ſit $pp + qq = \frac{1}{\sqrt{(xx+yy)}}$ reperimus

$$2pp = \frac{x + \sqrt{(xx+yy)}}{xx+yy} \text{ et } 2qq = \frac{\sqrt{(xx+yy)} - x}{xx+yy}$$

ſcribamus nunc $\frac{1}{p}$ et $\frac{1}{q}$ loco $2pp$ et $2qq$, et bina linearum ſyſtemata his aequationibus exprimuntur

$$xx + yy = px + p\sqrt{(xx+yy)} \text{ et } xx + yy = q\sqrt{(xx+yy)} - qx$$

quae reducuntur ad has:

$$(xx+yy)^2 - 2px(xx+yy) = ppyy; \text{ ſeu } yy = \tfrac{1}{2}pp + px - xx + p\sqrt{(\tfrac{1}{4}pp + px)}$$

$$(xx+yy)^2 + 2qx(xx+yy) = qqyy; \text{ ſeu } yy = \tfrac{1}{2}qq - qx - xx - q\sqrt{(\tfrac{1}{4}qq + qx)}.$$

Haec adeo duo linearum ſyſtemata ſub eadem communi aequatione quarti ordinis continentur, dum in altero tantum parameter negatiue accipitur.

XXI.

Haec ſolutio ideo omni attentione digna videtur quod in genere per integrationem eſt eruta, atque adeo ad ſolutionem huius problematis maxime accommodata:

Inuenire ea linearum algebraicarum ſyſtemata quarum traiectoriae itidem ſint lineae algebraicae.

Quamdiu enim aequatio pro illis lineis inter coordinatas x et y conſideratur, enodatio huius quaeſtionis fruſtra ſuſcipitur; totumque artificium, ad hunc ſcopum perducens in eo eſt ſitum, quod vtramque coordinatam per binas parametros variabiles vtriusque ſyſtematis reuocauimus. Solutio igitur huius problematis ita ſe habet, vt ex quouis caſu inuento facillime infiniti alii aſſignari queant. Sint enim t et u eiusmodi functiones parametrorum p et q, quae iam coordinatas binorum ſyſtematum referant ita vt ſit:

$$\left(\frac{dt}{dp}\right)\left(\frac{dt}{dq}\right) + \left(\frac{du}{dp}\right)\left(\frac{du}{dq}\right) = 0.$$

Tum aliae quotcunque coordinatae x et y obtinebuntur, ſumendo $x + y\sqrt{-1} = f:(t + u\sqrt{-1})$, vnde ſi t et u iam ſint functiones algebraicae, omnes functiones algebraicae formulae $t + u\sqrt{-1}$, pariter pro x et y functiones algebraicas praebebunt.

XXII.

Totum ergo negotium huc redit, vt primo caſus ſimpliciores pro t et u innoteſcant; ac ſimpliciſſimi quidem ſe ſtatim offerentes ſunt $t = p$ et $u = q$, vel etiam $t = \alpha p + \beta q$ et $u = \gamma p + \delta q$, qui iam vberrimam meſſem binorum ſyſtematum algebraicorum largiuntur.

Tum vero hic caſus ſingularis notari meretur

$$t = \sqrt{p(a+q)} \quad \text{et} \quad u = \sqrt{q(b-p)}$$

qui quomodo ſatisfaciat ſumendis differentialibus intelligitur:

$$\left(\frac{dt}{dp}\right) = \frac{\sqrt{(a+q)}}{2\sqrt{p}}; \quad \left(\frac{dt}{dq}\right) = \frac{\sqrt{p}}{2\sqrt{(a+q)}} \text{ hinc } \left(\frac{dt}{dp}\right)\left(\frac{dt}{dq}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{du}{dp}\right) = \frac{-\sqrt{q}}{2\sqrt{(b-p)}}; \quad \left(\frac{du}{dq}\right) = \frac{\sqrt{(b-p)}}{2\sqrt{q}} \text{ hinc } \left(\frac{du}{dp}\right)\left(\frac{du}{dq}\right) = -\frac{1}{4}$$

 ex

ex quo propterea etiam infinitas alias solutiones deriuare licet. Ipse autem hic casus pulcerrima duo systemata linearum secundi ordinis suppeditat: posito enim:

$$xx = ap + pq \text{ et } yy = bq - pq \text{ ob } xx + yy = ap + bq$$

pro vtroque systemate prodeunt hae aequationes:

1°. $p(xx+yy) - bxx + ap(b-p) = 0$

2°. $q(xx+yy) + ayy - bq(a+q) = 0$

quarum haec est pro infinitis ellipsibus, illa vero ob $b > p$ pro infinitis hyperbolis super communi axe ex eodem centro descriptis.

XXIII.

Supra iam ostendi (14) quomodo ex huiusmodi valoribus idoneis pro t et u cognitis infinitos valores T, V, T′, V′, T″, V″, etc. elicere liceat, ex quibus deinceps porro infinita alia systematum paria formari queant, sumendo

$$x = \alpha T - \varepsilon V + \beta T' - \zeta V' + \gamma T'' - \eta V'' \text{ etc.}$$

$$y = \alpha V + \varepsilon T + \beta V' + \zeta T' + \gamma V'' + \eta T'' \text{ etc.}$$

Hos quidem valores T et V ibi ex solis potestatibus formulae $t + u\sqrt{-1}$ elicui, ponendo $T + V\sqrt{-1} = (t + u\sqrt{-1})^n$ eodem autem iure aliis quibuscunque functionibus vti licet. Veluti si ponamus $T + V\sqrt{-1} = \frac{f + g(t + u\sqrt{-1})}{b + k(t + u\sqrt{-1})} = \frac{f + gt + gu\sqrt{-1}}{b + kt + ku\sqrt{-1}}$, denominatorem primo realem reddamus tum vero adipiscemur:

T =

$$T = \frac{(f+gt)(b+kt) + gkuu}{(b+kt)^2 + kkuu} \text{ et } V = \frac{(gb - fk)u}{(b+kt)^2 + kkuu}$$

vbi notasse iuuabit, cum sit $T - V\sqrt{-1} = \frac{f + gt - gu\sqrt{-1}}{b + kt - ku\sqrt{-1}}$ fore $TT + VV = \frac{(f+gt)^2 + gguu}{(b+kt)^2 + kkuu}$ hinc enim colligitur:

$TT + VV = \frac{(fk + gb + 2gkt)T - g(f+gt)}{k(b+kt)}$ tum vero etiam $T(b+kt) - kuV = f + gt$ et $TT + VV = \frac{(gb - fk)V + 2gkuT - ggu}{kku}$ item $kT + \frac{(b+kt)V}{u} - g = 0$

XXIV.

Applicemus hanc euolutionem ad casus simpliciores ac ponamus primo $t = p$ et $u = q$, et pro T et V ipsas coordinatas x et y sumendo binae postremae aequationes praebent

$$xx + yy = \frac{(fk + gb + 2gkp)x - g(f+gp)}{k(b+kp)} = \frac{(f+gp)x + gqy}{b+kp}$$

$$(b + kp)x - kqy = f + gp$$

quarum prior solam parametrum p continens, iam alterum linearum systema exhibet, quae quidem omnes erunt circuli. Tum vero ob $p = \frac{f - bx + kqy}{kx - g}$ pro altero systemate orietur haec aequatio: facta reductione.

$$xx + yy = \frac{(gb - fk)y + 2gkqx - ggq}{kkq}$$

quae etiam infinitos circulos complectitur:

Pro altero casu faciamus $a = 0$, $b = cc$, et loco p et q scribamus pp et qq vt habeamus $t = pq$ et $u = q\sqrt{(cc - pp)}$ hinc ergo fiet

$$xx + yy = \frac{(fk + gb + 2gkpq)x - g(f + gpq)}{k(b + kpq)}; \ (b + kpq)x - kqy\sqrt{(cc - pp)} = f + gpq,$$

tum vero etiam:

xx

$xx+yy=\frac{(gb-fk)y+2gkqx\sqrt{(cc-pp)}-ggq\sqrt{(cc-pp)}}{kkq\sqrt{(cc-pp)}}$ et $kx+\frac{(b+kpq)y}{q\sqrt{(cc-pp)}}-g=0$

Vnde cum sit $q=\frac{by}{(g-kx)\sqrt{(cc-pp)}-kpy}$ elicitur pro altero systemate haec aequatio:

$$xx-yy=\frac{(gb+fk)x}{bk}-\frac{(gb-fk)py}{bk\sqrt{(cc-pp)}}-\frac{fg}{bk}$$

Quae cum hac forma repraesentari queat:

$$xx+yy=py-aa \text{ pro circulis}$$

alterius systematis aequatio erit

$$xx+yy=qx+aa \text{ itidem pro circulis.}$$

Talibus circulis in mappis mundi meridiani et paralleli referri solent.

XXV.

Ne iste calculus tantopere fiat molestus, si in genere velimus ponere $t=\sqrt{p(a+q)}$ et $u=\sqrt{q(b-p)}$, primo hinc tam p quam q per t et u exprimamus vnde sequentes nascentur aequationes

$$0=btt-p(tt+uu)-ap(b-p) \text{ et } 0=auu+q(tt+uu)-bq(a+q)$$

Iam loco T et V capiendo ipsas coordinatas x et y ex formulis superioribus colligemus:

$$t=\frac{(fk+gb)x-fg-bk(xx+yy)}{kk(xx+yy)-2gkx+gg}=\frac{(kx-g)(f-bx)-bkyy}{(kx-g)^2+kkyy}$$

$$u=\frac{(gb-fk)y}{(kx-g)^2+kkyy}.$$

Ponamus ad calculum contrahendum

$f-bx=br$ et $kx-g=ks$ vt sit $fk-gb=bk(r+s)$ atque

$t=$

$$t=\frac{b}{k}\cdot\frac{rs-yy}{ss+yy};\ u=\frac{-b}{k}\cdot\frac{(r+s)y}{ss+yy} \text{ ideoque}$$

$$tt+uu=\frac{bb}{kk}\cdot\frac{rrss+(rr+ss)yy+y^4}{(ss+yy)^2}=\frac{bb}{kk}\cdot\frac{rr+yy}{ss+yy}.$$

Nunc quia r et s abscissam x inuoluunt, aequationes pro binis linearum systematibus ita erunt comparatae.

I. $0=b(rs-yy)^2-p(rr+yy)(ss+yy)-\frac{akkp(b-p)}{bb}(ss+yy)^2$

II. $0=a(r+s)^2yy+q(rr+yy)(ss+yy)-\frac{bkk(a+q)}{bb}(ss+yy)^2$

quae ambae ad lineas quarti ordinis referuntur.

Nunc casu $a=0$, cuius euolutio ante valde erat difficilis posterior aequatio per $ss+yy$ diuisa statim dat

$0=rr+yy-\frac{kk(a+q)}{bb}(ss+yy)$ seu $bb(rr+yy)=bkkq(ss+yy)$

quae ob $r=\frac{f}{b}-x$ et $s=x-\frac{g}{k}$ manifesto est ad circulum, prior vero ob $(rr+yy)(ss+yy)=(rs-yy)^2+(r+s)^2yy$ abit in hanc: $0=(b-p)(rs-yy)^2-p(r+s)^2yy$,

seu $rs-yy=(r+s)y\sqrt{\frac{p}{b-p}}$ pariter pro circulo.

XXVI.

Ex solutione autem generali supra data etiam hanc quaestionem elegantissimam enodare poterimus, quam alia methodo vix tractare liceat.

Inuenire eiusmodi bina systemata linearum se mutuo normaliter secantium, quae ambo sub eadem aequatione contineantur, ita vt prouti parametro valor tribua-

tribuatur vel positiuus vel negatiuus ambo inde nascantur systemata.

Casum simplicissimum huic conditioni satisfacientem iam supra §. 17. sumus adepti, quo haec aequatio $yy = pp - 2px$, prout parameter p vel positiue vel negatiue accipitur, duas parabolarum series exhibet, quae se mutuo ad angulos rectos intersecant.

XXVII.

Solutionem autem latius patentem reperiemus, si ponamus

$$x + y\sqrt{-1} = (p + q\sqrt{-1})^{2n} = (pp - qq + 2pq\sqrt{-1})^n$$

quae forma permutandis parametris p et q, abit in

$$(qq - pp + 2pq\sqrt{-1})^n = (-1)^n(pp - qq - 2pq\sqrt{-1})^n$$
$$= (-1)^n(x - y\sqrt{-1})$$

ideoque tum $x + y\sqrt{-1}$ abit vel in $x - y\sqrt{-1}$ vel in $-x + y\sqrt{-1}$ prout n fuerit vel numerus par vel impar. Illo autem casu tantum applicata y hoc vero tantum abscissa x negatiue accipitur, et vtroque curuae manent eaedem, seu sub eadem aequatione contentae. Ex quo si litterae α, β, γ, etc. denotent numeros impares quoscunque, geminam solutionem hinc consequimur:

I. $x + y\sqrt{-1} = A(p + q\sqrt{-1})^{2\alpha} + B(p + q\sqrt{-1})^{2\beta}$
$+ C(p + q\sqrt{-1})^{2\gamma}$ etc.

II. $x + y\sqrt{-1} = A(p + q\sqrt{-1})^{4\alpha} + B(p + q\sqrt{-1})^{4\beta}$
$+ C(p + q\sqrt{-1})^{4\gamma}$ etc.

in

in priori scilicet omnes exponentes sunt numeri impariter pares, in posteriori vero pariter pares: litterae autem α, β, γ etiam numeros negatiuos atque adeo fractos, dummodo numeratores et denominatores sint impares denotare possunt. Generalius vero hae duae ita exhiberi possunt, vt posito $pp - qq + 2pq\sqrt{-1} = R$ formula $x + y\sqrt{-1}$ aequari debeat functioni vel impari vel pari ipsius R.

XXVIII.

Adiungere insuper liceat hoc problema.

Inuenire eiusmodi curuas secandas, vt curuae secantes ab illis non aliter discrepent nisi quod coordinatae x *et* y *inter se permutentur: seu vt eaedem lineae ad axem priori normalem translatae illas normaliter traiiciant.*

Soluetur hoc problema ope huius formulae

$$x + y\sqrt{-1} = A(p + q\sqrt{-1})^{\alpha} + B(p + q\sqrt{-1})^{\beta} + C(p + q\sqrt{-1})^{\gamma}$$

si loco exponentium α, β, γ capiantur numeri impares vel formae $4i + 1$ vel formae $4i + 3$. Huius autem duplicis generis numeros impares in eadem forma inter se neutiquam permiscere licet. Vnde $x + y\sqrt{-1}$ aequari debet eiusmodi functioni impari ipsius $p + q\sqrt{-1}$, in qua nullae aliae occurrant potestates, nisi quarum exponentes sint vel omnes formae $4i + 1$, vel omnes formae $4i + 3$.

DE